Leçons : 106, 149, 204

[CAL] p114, 115

dvpt : $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe dans $M_n(\mathbb{C})$.

aussi ok pour $\mathbb{R}$

* ouvert :

On peut voir $GL_n(\mathbb{C})$ comme $\det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ où :

. $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$

. det : $\begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ A \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \end{array}$ est continue (polynomiale en les coeff de A).

Donc on en déduit que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert (comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue).

aussi ok pour $\mathbb{R}$

* dense :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'il existe une suite $(A_k)_k$ de $GL_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A.

Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ c'est trivial (suite constante égale à A)

Supposons alors A non inversible. Montrons qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$0 < |\lambda| < 1/s \Rightarrow \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } A.$$

0 étant valeur propre de A, considérons $\Gamma := Sp(A) \setminus \{0\}$ qui est fini et éventuellement vide.

. Si Γ est vide, alors 0 est la seule valeur propre de A et dans ce cas tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ convient (par exemple $s=1$).

. Si Γ est non vide, il possède un élément de module minimal non nul m et $s > 1/m$ convient.

La suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k > s}$ est donc bien une suite de $GL_n(\mathbb{C})$ (sinon $1/k$ serait valeur propre de A) qui converge vers A car $(\frac{1}{k} I_n)_k$ converge vers 0 (on peut le voir avec la norme sup).

pas ok dans $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}^*$ non connexe)

ouvert : connexe par arc = connexe

* connexe : (on montre en fait que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs)

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$.

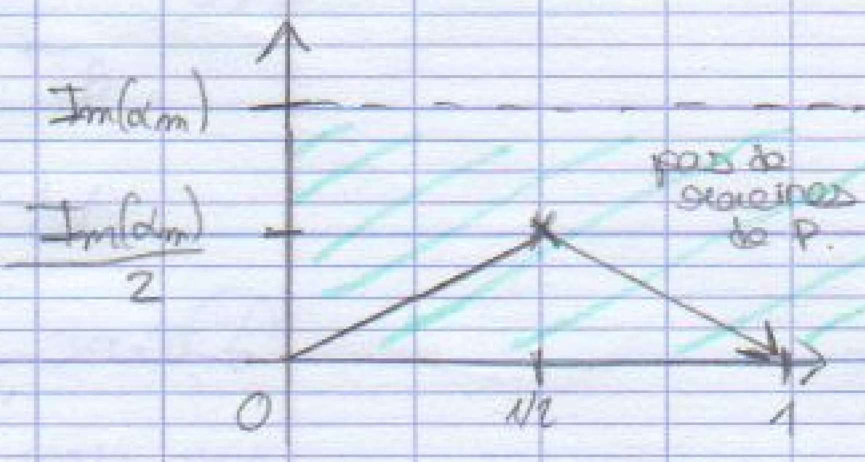
$P : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \det((1-t)A + tB) \end{array}$ est une fonction polynomiale en t (car le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice)

De plus $P(0) = \det(A) \neq 0$, car $A \in GL_n(\mathbb{C})$, donc le polynôme associé est non nul et possède un nombre fini de racines.

On va alors tracer dans $\mathbb{C}$ un chemin γ reliant 0 à 1 qui évite ces racines.
Si toutes les racines sont réelles, posons $\alpha_m = i$; et sinon prenons α_m la racine de P telle que sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(\alpha_m)$ soit minimale non nulle (possible car nombre fini de racines).

Posons alors :

$$\alpha : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t + it\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ t + i(1-t)\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{array}$$



ne pas écrire juste expliquer schéma

α est bien un chemin continu telle que

$\alpha(0) = 0$ et $\alpha(1) = 1$.
Ainsi $P(\alpha(0)) = \det(A) \neq 0$, $P(\alpha(1)) = \det B \neq 0$ (car $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$)
et : $\forall\, t \in]0,1[\quad 0 < \mathrm{Im}(\alpha(t)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha_m) < \mathrm{Im}(\alpha_m)$

donc $\alpha(t)$ n'annule pas P (sinon contradiction de la minimalité de α_m) pour tout $t \in [0,1]$.

Prenons alors : $\gamma : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (1-\alpha(t))A + \alpha(t)B \end{array}$

γ est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ par ce qui vient d'être fait.
La continuité de α engendre la continuité de γ.
On a bien $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$.
Ainsi γ est un chemin reliant A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$
d'où $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc et finalement connexe.